Вступительная Олимпиада.

1. На планете Чау-Мяу 50 государств. Каждый год какие-нибудь три государства объединяются в одно. Сколько государств будет на планете через 10 лет?

2. Можно ли составить таблицу 5×5 из натуральных чисел так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четной, а произведение в каждом столбце было нечетным?

3. В музее циркового искусства выствлены три закрытых ящика. В одном из них находятся два белых шара, в другом — два черных шара, а в третьем — один белый и один черный. На пояснительных табличках рядом с ящиками написано “Белый-Белый”, “Черный-Белый”, “Черный-Черный”. Хулиган Вася переставил эти таблички, и теперь ни одна из них не соответствует действительности. Как определить, где что лежит, если разрешается выбрать один из ящиков и вынуть из него (не глядя) один шар?

4. Математик Вася живет в доме, на каждом этаже которого по 6 квартир, на 9 этаже. Его брат живет в доме, в котором на каждом этаже по 7 квартир, на седьмом этаже в квартире с тем же номером. Найдите номер квартиры братьев.

5. За столом сидели 5 мальчиков и 6 девочек, а на столе на тарелке лежало несколько булочек. Каждая девочка дала по булочке (с тарелки) каждому знакомому мальчику. Затем каждый мальчик дал по булочке (с тарелки) каждой незнакомой девочке. После этого тарелка опустела. Сколько было булочек?

6. 25 телефонов соединяют проводами 24 цветов. Можно ли их соединить так, чтобы из любого телефона выходили провода всех 24 цветов?

7. Докажите, что не существует десятизначного числа, которое при перестановке первой и последней цифры увеличивается ровно в 5 раз.

8. За круглым столом сидят 11 человек. Некоторые из них всегда говорят правду, другие всегда лгут. Каждый сидящий за столом сказал: “Один из моих соседей лжец, а другой — правдивец”. Докажите, что все они лжецы.

5 класс.

1. a) Три пирата делят слитки золота весом $1, 2, \ldots, 10$ килограммов. Могут ли они поделить золото поровну, если распиливать слитки запрещаеться? b) При дележе один из пиратов был убит. Могут ли два оставшихся пирата разделить золото поровну, если распиливать слитки по-прежнему запрещается?

2. a) Можно ли квадрат 5×5 разрезать на фигурки вида   ? b) Можно ли квадрат 5×5 с вырезанной угловой клеткой разрезать фигурки вида   ?

3. Лифт 100-этажного дома испортил хулиган Вася, и теперь там работают только две кнопки: кнопка, позволяющая спуститься на 9 этажей, и кнопка, позволяющая подняться на 7 этажей. Можно ли пользуясь этим лифтом попасть a) с 1-го этажа на 2-ой? b) со 2-го этажа на 1-ый?

4. После стирки 7 одинаково испачканных рубашек кусок мыла уменьшился в два раза по длине, ширине и высоте. На сколько еще рубашек хватит оставшегося куска?

5. В темной комнате в буфете лежит 7 конфет "Белочка 8 конфет "Мишка на севере"и 9 конфет "Грильяж". Сколько нужно вытащить конфет, чтобы наверняка съесть конфету "Мишка на севере"?

6. В полосе из 11 клеток стоит два числа: в первой клетке число 6, а в девятой клетке число 4. Можно ли расставить числа в остальных клетках так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих клетках равнялась 15?

7. Сколько нужно сделать разрезов, чтобы разрезать 10 палок колбасы на 10 частей каждую?

8. Докажите, что не существует десятизначного числа, которое при перестановке первой и последней цифры увеличивается ровно в 5 раз.

9. Занятие кружка художественного свиста проходят по вторникам и четвергам. Оказалось, что в некотором месяце состоиться 10 занятий этого кружка. На какой день недели приходится первое число этого месяца?

10. К имевшимся в задаче 1 слиткам золота весом $1, 2, 3, \ldots, 10$ килограммов добавлися еще слиток весом 12 килограммов и на радостях убитый пират ожил. a) Смогут ли пираты теперь разделить золото на троих поровну? b) А если бы их было двое? c) А если еще добавить слиток весом 12 килограммов?

11. От шахматной доски 8×8 отрезали a) угловую клетку (например, a1) b) две соседние угловые клетки (a1 и a8) c) две противоположные угловые клетки (a1 и h8). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки вида ?

12. Лифт 100-этажного дома по-прежнему испорчен: в нем работают только кнопки подъема на 7 этажей и спуска на 9 этажей. Сможет ли отличник Петя, пользуясь этим лифтом, попасть с любого этажа на любой?

13. Винни-Пух позвал Пятачка в тир и купил ему 5 выстрелов. За каждое попадание Пух покупал Пятачку еще 2 выстрела. Всего Пятачок сделал 2001 выстрел. Сколько раз он попал?

14. a) Четно или нечетно число $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$? b) Насколько сумма четных чисел первой сотни больше суммы нечетных чисел первой сотни?

15. В кружке художественного свиста занимаются 25 человек. Правда ли, что в любом случае есть трое кружковцев, родившихся в одном месяце?

16. За круглым столом сидят 11 пациентов психической лечебницы. Некоторые из них всегда говорят правду, другие всегда лгут. Каждый сидящий за столом сказал: "У моих соседей разные виды помешательства". Докажите, что все они патологические лжецы.

17. Бизнесмен Вася положил на счет в банке 3 рубля. Каждый день на его счет добавляется количество рублей, равное сумме цифр текущего счета. Когда Вася пришел забирать вклад, ему вылали ровно 1000 рублей. Докажите, что его обсчитали.

18. После нескольких занятий кружка художественного свиста оказалсь, что у каждого в кружке есть ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что в кружке занимается четное число людей.

19. На какую цифру оканчивается a) 6^{2001}? b) 9^{2001}? c) 7^{2001}?

20. Можно ли число 1999 написать несколько раз подряд так, чтобы полученное число делилось a) на 6? b) на 3?

21. Четно или нечетно число $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2001^2$?

22. В классе, в котором учится хулиган Вася, всего 30 человек. В контрольной работе по географии Вася сделал 13 ошибок, остальные сделали меньше. Докажите, что есть трое, которые сделали ошибок поровну.

23. Получив двойку по географии, Вася решил порвать географическую карту в клочья. Каждый попавший ему в руки клочок он рвет на четыре части. Может ли он когда-нибудь получить ровно a) 2001 клочок? b) 2002 клочка?

24. Побывав в гостях у друга Пети, Вася испортил лифт и в его 20-этажном доме и теперь там работают только кнопки подъема на 13 этажей и спуска на 8 этажей. Может ли Петя, пользуясь этим лифтом попасть с 4-го этажа на 5-ый?

25. Умная Маша с вымытой шеей перемножила натуральные числа от 1 до 15 и получила a)1307674368564 b)1307674368560 c)1307684368000 d)14694000. Докажите, что она всегда ошибалась.

26. Вася решил быть осторожнее и теперь положил на счет в том же банке рубль. По-прежнему к счету каждый день прибавляется количество рублей, равное сумме цифр текущего счета. Когда Вася пришел забирать вклад, ему выдали 3000 рублей. “Кажется, опять обсчитали” подумал Вася. Прав ли он?

27. На тарелке лежит a)9 b)10 пирожных. За ход можно съесть одно или два пирожных. Вася и Петя ходят по очереди, первым ходит Вася. Съевший последнее. пирожное выигрывает, а проигравший оплачивает пирушку Докажите, что a) Петя b) Вася может выиграть независимо от действий другого игрока.

28. В кружке художественного свиста у каждого ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что кружок можно разделить на два кружка так, чтобы ни в каком из двух кружков не было ни друзей, ни врагов.

29. 25 телефонов соединяют проводами 24 цветов. Можно ли их соединить так, чтобы из любого телефона выходили провода всех 24 цветов?

30. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на шахматной доске 8×8?

31. Докажите, что квадрат 8×8 можно разрезать на фигуры вида: a) b) c) d) .

32. Есть три монеты, одинаковые на вид, из которых две настоящих (равные по весу) и одна фальшивая - легче настоящих. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

33. Вася и Петя вдвоем рвут географическую карту. Вася каждый попавший ему в руки кусок рвет на 4 части, а Петя — на 7 частей. Могут ли они когда-нибудь получить a) 2001 клочок? b) 2002 клочка?

34. На прямой расположено пять точке A, B, C, D, E (именно в таком порядке). Известно, что $AB = 19$ см., $CE = 97$ см., $AC = BD$. Найдите длину отрезка DE.

35. Вася 4 дня подряд ел на обед пирожные. В любые два последовательных дня он съел количество пирожных, отличающееся на один. Мог ли он за все четыре дня съесть на обед 25 пирожных?

36. В a) 15-этажном b) 16-этажном доме хулиган Вася испортил лифт, и теперь там работают только кнопки подъема на 7 этажей и спуска на 9 этажей. Можно ли, пользуясь этим лифтом, добраться с любого этажа на любой?

37. На тарелке лежит a) 9 пирожных b) 10 пирожных. За ход можно съесть одно или два пирожных. Вася и Петя ходит по очереди, первым ходит Вася. Съевший последнее пирожное проигрывает и платит за пирушку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

38. Докажите, что число a) $4^{2001} + 6^{2001}$ b) $9^{2001} + 1$ c) $3^{2001} + 7^{2001}$ делится на 10.

39. В кружке художественного свиста каждый мальчик дружит с пятью девочками, а каждая девочка с пятью мальчиками. Докажите, что в кружке поровну мальчиков и девочек.

1(40). На какую цифру оканчивается число $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$?

2(41). Можно ли из прямоугольников $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \ldots, 1 \times 13$ сложить какой-нибудь прямоугольник со сторонами, большими 1?

3(42). Как без измерительных приборов отрезать от шнура длиной 10 метров кусок длиной 1 м. 25 см.?

4(43). В палате уже известной психической лечебницы (пациенты которой либо всегда лгут, либо всегда говорят правду) двое больных обсуждали вчерашние футбольные матчи. В конце разговора один из них заметил: "Хотя бы один из нас лжец". Кто из них кем является?

5(44). В детский сад для обучения чтению завезли карточки со слогами "БА"и "НЯ". Каждый ребенок взял себе три карточки. Оказалось, что слово "БАБА"могут составить 30 детей, слово "НЯНЯ— 20 детей, а слово "БАНЯ— 40 детей. У скольких детей все три карточки одинаковы?

6(45). Имеется 35 гирь по 2 грамма каждая и 5 гирь весом по 4 грамма каждая. Можно ли их разложить на две кучки равного веса?

7(46). В классе, где учится Петя, 22 человека вместе с ним. Докажите, что есть четверо, родившиеся в один день недели?

8(47). Можно ли квадрат 10×10 разрезать без остатка на фигуры вида ?

48. Докажите, что из a) трех b) четырех c) одиннадцати натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на a) 2 b) 3 c) 10.

49. Какой остаток от деления на три дают числа a) 12345? b) $1234512345 \ldots 12345$, где 12345 написано 10 раз? c) 11 раз? d) 12 раз? e) 4^2? f) 4^3? g) 4^{20}?

50. В 100-этажном доме хулиган Вася опять испортил лифт, и теперь там работают только кнопки подъема на три этажа и спуска на шесть этажей. Можно ли, пользуясь этим лифтом, попасть с первого этажа на a) 79? b) 80?

51. В полоске из восьми клеток в первой клетке стоит число 5, а в восьмой - число 4. a) Докажите, что оставшиеся клетки можно заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих клетках равнялась 12. b) Докажите, что это можно сделать единственным образом.

52. Вася перемножал цифры некоторого натурального числа. Мог ли он в итоге получить 1980?

53. В кружке, состоящем из 35 человек, 20 любят решать задачи, 11 - болтать на занятиях, а 10 человек терпеть не могут ни решать задачи, ни болтать на занятиях, но ходить в кружок их заставляют родители. Сколько кружковцев любят делать и то, и другое?

54. Есть a) 9 b) 8 одинаковых монет, из которых одна монета фальшивая — весит легче настоящих. Все настоящие монеты весят одинаково. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

55. Докажите, что никакой прямоугольник с целыми сторонами нельзя разрезать на фигурки вида .

56. Какой остаток от деления на три дают числа a) $3^9 + 4^9$? b) $4^9 + 5^9$? c) $4^{10} + 5^{10}$?

57. На какие цифры может оканчиваться точный квадрат (квадрат натурального числа)?

58. Бизнесмен Петя положил на счет в банке 3 рубля. По-прежнему, каждый день к счету прибавляется количество рублей, равное сумме цифр текущего счета. Когда он пришел забирать вклад, ему выдали 9000 рублей. Верно ли, что и его обсчитали?

59. На слете инопланетян встретились 2001 марсианин. У каждого марсианина имеется 3 руконожки. Могут ли они взяться за руконожки так, чтобы не осталось ни одной свободной руконожки (в каждом руконожкопожатии участвуют две руконожки)?

60. Можно ли в прямоугольнике 5×6 расставить числа так, чтобы сумма чисел в любой строке и любом столбце равнялась 1?

61. Можно ли шашечную доску 10×10 разрезать на фигуры вида $Ttetra$?

62. На шахматной доске стоит 51 ладья. Докажите, что любая ладья бьет какую-нибудь другую.

63. Имеется 9 одинаковых с виду монет, из которых одна — фальшивая, отличается по весу от настоящих (но неизвестно — легче она или тяжелее). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь узнать — легче ли фальшивая монета настоящей или тяжелее?

64. Какой остаток от деления на три дают числа a) 2^{100}? b) 2^{101}? c) $2^{101} + 4^{101}$?

65. Докажите и запомните формулу: $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

66. В стране Коррупции существует двухпалатный парламент, причем в палатах поровну депутатов. На голосовании по вопросу повышения зарплаты депутатам присутствовали все, и председатель объявил, что решение принято, причем за проголосовало на 11 депутатов больше, чем против. Представитель левых сил утверждает, что результаты голосования подтасованы. Прав ли он?

67. В 100-этажном доме хулиган Вася испортил лифт, и теперь там работают кнопки подъема на шесть этажей и спуска на девять этажей. На какие этажи можно попасть с первого, пользуясь этим лифтом?

68. На каждой клетке доски 5×5 сидит один дрессированный лягушонок. По команде "Ква"каждый лягушонок перепрыгивает на одну из соседних клеток, (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону). Докажите, что после команды "Ква"какие-то два лягушонка окажутся на одной клетке.

69. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно расставить на шахматной доске 8×8?

70. Из двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что полученная разность делится на 9.

71. Какие остатки от деления a) на 3 b) на 4 могут давать точные квадраты?

72. Вася и Петя заказали еще a) 19 b) 20 пирожных и играют в игру. За ход можно съесть 1, 2 или 3 пирожных, первым ходит Вася. Съевший последнее пирожное выигрывает, а проигравший платит за пирушку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

73. В кружке ритуальных танцев и свистопляски каждый мальчик дружит ровно с пятью девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Кого в кружке больше — мальчиков или девочек?

74. Какие остатки при делении на девять дают числа a) 12345? b) $12345\ldots12345$, где 12345 написано 10 раз? c) 11 раз? d) 12 раз? e) 19^{20} f) 8^{20}?

75. Какое наименьшее число разломов нужно сделать, чтобы разломать шоколадку 3×3 на маленькие плитки 1×1, если накладывать части шоколадки друг на друга запрещается?

76. Докажите, что a) 1234567 b) 12345678 c) 1234567890 — не точные квадраты.

77. К двузначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите, что полученная сумма делится на 11.

78. Старший брат Пети положил на счет в том же банке 7 рублей. По-прежнему к текущему счету прибавляется количество рублей, равное сумме цифр текущего счета. Когда он пришел забирать вклад, то и ему выдали 9000 рублей. Верно ли, что и его обсчитали?

79. Среди математиков мира каждый девятый — философов, а среди философов мира каждый девятый — математик. Кого в мире больше — математиков или философов?

80. Умная Маша с вымытой шеей перемножила натуральные числа от 1 до 30. На сколько нулей оканчивается полученное произведение?

81. Докажите и запомните формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

82. Можно ли прямоугольник 5×9 разрезать на уголки из трех клеток?

83. Верно ли, что a) если число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27? b) Если сумма цифр числа делится на 27 то и само число делится на 27?

84. При каких простых p число $5 \cdot p + 1$ тоже простое?

85. Какое наименьшее число распилов нужно сделать, чтобы распилить квадрат a) 3×3 b) 4×4 на единичные квадратики, если отпиленные части можно накладывать друг на друга и пилить вместе?

86. Можно ли в выражении *1*2*3*4*5*6*7*8*9 заменить все звездочки на $+$ или $-$ так, чтобы в ответе получилось a) 1? b) 0?

87. Докажите, что не существует натуральных a и b таких, что $ab(a+b) = 15015$.

88. Из трехзначного числа вычли число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Докажите что полученная разность делится a) на 9. b) на 99.

89. 25 человек писали контрольные по алгебре и геометрии. 15 человек не получили ни одной двойки, 7 человек получили двойку по геометрии, и только хулиган Вася получил двойки за обе контрольные. Сколько двоек по алгебре?

90. Докажите что число a) $100^2 - 1$ b) 89999 - составное.

91. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $\underbrace{1999\ldots1999}_{n} \equiv 7(mod 9)$.

92. Вася и Петя заказали еще a) 20 b) 21 пирожное. За ход разрешается съесть 1,2 или 3 пирожных, первым ходит Вася. Съевший последнее пирожное проигрывает и платит за пирушку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

93. Вычислите a)$1+2+\cdots+99+100$ b) $1+2+\cdots+198+199$ c) Докажите и запомните формулу $1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

94. Какой остаток при делении на 4 дают числа a) 12345? b) 123456? c) 53232? d) 5^{20}? e) 6^{20}?

95. Какое наименьшее число клеток нужно закрасить черной краской на белом квадрате 6×6, чтобы из него нельзя было вырезать ни одного белого уголка из трех клеток?

96. При каких простых p число $7p^2 + 1$ тоже простое?

97. В кружке свистопляски, в котором a) 6 b) 20 мальчиков, случилась драка и каждый мальчик поставил каждому синяк. Сколько всего поставлено синяков?

98. a) 6 b) 20 команд сыграли турнир по футболу в один круг (то есть каждый сыграл с каждым ровно один раз). Сколько всего матчей было сыграно?

99. Докажите, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 1$ не делится a) на 3. b) на 4.

100. Умная Маша с вымытой шеей решала пример на сложение нескольких чисел и получила в ответе 2001. Петя решал тот же пример, только один знак $+$ он заменил на -, и получил в ответе 1500. Маша утверждает, что он ошибся. Права ли Маша?

101. Докажите и запомните формулу: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

102. По уточненным данным, среди математиков мира каждый девятый — философ, а среди философов мира каждый седьмой — математик. Кого в мире больше — математиков или философов?

103. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что: $x^2 - y^2 =$ a) 19 b) 15.

104. Можно ли квадрат 9×9 с вырезанной угловой клеткой разрезать на квадраты 2×2?

105. В 15-этажном доме хулиган Вася испортил лифт, и теперь там работают только кнопки подъема на 7 этажей и спуска на 9. Можно ли, пользуясь этим лифтом, попасть с 3 этажа на 12?

106. Докажите, что в выражении *1*2*3*4*5*6*7*8*9, заменяя звездочки на $+$ или - a) нельзя получить четное число. b) можно получить все нечетные натуральные числа от 1 до 45.

107. Докажите, что на шахматной доске 8×8 a) можно расставить 14 не бьющих друг друга слонов. b) 15 не бьющих друг друга слонов расставить нельзя.

108. Докажите, что число a) 1234567895 b) 1234567896 - не точный квадрат.

109. Докажите, что в любой компании есть два человека, у которых поровну знакомых среди членов этой компании.

110. $\overline{ab} + \overline{ba} = x^2$. Найдите x.

111. Можно ли в прямоугольнике 5×6 расставить натуральные числа от 1 до 30 так, чтобы a) суммы чисел в каждой строчке были равные? b) суммы чисел в каждом столбце были равные?

112. Найдите все такие простые p, что числа $p + 10$ и $p + 14$ - оба простые.

113. Докажите, что число a) 359999 b) $100^2 + 201$ - составное.

114. В таблице 6×6 расставили числа 0,1 или 2 и посчитали 14 сумм: в строках, столбцах и двух диагоналях. a) Какое наименьшее число могло получиться? b) Какое наибольшее число могло получиться? c) Докажите, что среди этих сумм есть две одинаковые.

115. Какая из дробей больше или $\frac{101^2-99^2}{201^2-199^2}$ или $\frac{201^2-199^2}{301^2-299^2}$?

116. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигуры вида ?

117. 20 команд играют волейбольный турнир в один круг. За победу начисляют 1 очко, за поражение — 0 очков. Верно ли, что в любой момент турнира есть две команды, набравшие поровну очков.

118. Найдите все простые p такие, что число $p^2 - 4$ — тоже простое.

119. Вася и Петя заказали еще a) 30 b) 31 пирожное и играют в игру. За ход можно съесть от 1 до 5 пирожных, первым ходит Вася. Съевший последнее пирожное выигрывает, а проигравший оплачивает пирушку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

120. Докажите, что число a) 57599 b) $200^2 - 399$ — составное.

121. Докажите, что бумажный квадрат 2×2 можно сложить так, чтобы одним взмахом ножниц его можно было разрезать на четыре единичных квадратика.

122. Умная Маша с вымытой шеей решала пример по арифметике: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 100 \cdot 101$ и получила в ответе a) 2358537 b) 23585374 c) 64520. Докажите, что Маша все время ошибалась.

123. 30 кружковцев устроили турнир по игре в "балду по олимпийской системе до определения победителя. Сколько матчей было сыграно?

124. Натуральные числа от 1 до 1000 выписали в ряд. Затем каждое число заменили на его сумму цифр, каждое из полученных чисел снова заменили на его сумму цифр, и так далее, пока все числа не стали однозначными. Каких чисел получилось больше: единиц или двоек?

1.(125) В некоторой стране 25 футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все команды собираются в другую страну на важный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя по 25 человек за один рейс. Еще один футболист прилетел на собственном вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда в полном составе доставлена к месту матча.

2. (126) Винни-Пух и Тигра соревновались в лазании на дерево и обратно. Винни залез и спустился с одинаковой скоростью. Тигра поднимался вдвое быстрее, а спускался вдвое медленнее, чем Винни-Пух. Кто финишировал первым?

3. (127) Докажите, что число $7^{2002} + 9^{2002}$ делится на 10.

4. (128) Среди следующих утверждений ровно одно неверно. Найдите его:

- если точный квадрат делится на 6, то он делится на 36.
- если точный квадрат делится на 7, то он делится на 49.
- если точный квадрат делится на 8, то он делится на 64.

5. (129) Можно ли один рубль разменять на 25 монет по 1, 3 и 5 копеек?

6. (130) Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

7. (131) Хулиган Вася целый день пилил бревна на даче. Сколько было бревен, если за 52 распила из них получилось 72 чурбана.

8. (132) Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Если без присмотра оставить на одном берегу волка и козу, то волк съест козу, а если оставить козу и капусту, то коза съест капусту. В присутствии крестьянина никто никого не ест. В лодке помещается крестьянин и еще только волк, только коза, или только капуста. Как ему перевезти всех на другой берег?

9. (133) Имеется ряд цифр: $1, 3, \dots$, в котором сумма любых трех подряд стоящих цифр делится на 8. Какая цифра стоит на сотом месте? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

10. (134) Если зарплату сначала увеличить на 20 процентов, а потом уменьшить на 20 процентов, то увеличиться она в результате или уменьшиться?

11. (135) В течении недели кружковцы играли в "балду". Оказалось, что каждый кружковец сыграл ровно 6 партий. Могло ли так случится, что всего за неделю было сыграно 40 партий?

12. (136) На слете инопланетян встретилось 6 марсиан, у каждого из которых ровно 3 руконожки. Могут ли они взяться за руконожки так, чтобы не осталось ни одной свободной руконожки, и любые два марсианина участвовали вместе не более чем в одном руконожкопожатии.

137. Трое шахматистов сыграли турнир, в котором каждый сыграл с каждым поровну партий, а всего любой шахматист сыграл 4 партии. Сколько всего партий было в турнире?

138. Имеется ряд цифр: $1, 3, \ldots$, в котором сумма любых трех подряд стоящих цифр делится на 7. Какая цифра может стоять на сотом месте?

139. Несколько волейбольных команд играют турнир в один круг (каждая сыграет с каждой ровно 1 матч). Докажите, что в любой момент турнира есть две команды, сыгравшие поровну матчей.

140. Можно ли купюру достоинством 100 тугриков разменять на 26 монет по 1,7 и 10 тугриков?

141. Найдите все простые p, такие что число $p^2 + 2$ тоже простое.

142. Бумажный прямоугольник 6×11 разрезали на фигуры и , после чего одну из фигурок потеряли. Докажите, что из оставшихся фигурок нельзя сложить прямоугольник (фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать).

143. Имеется двое песочных часов: на 7 и на 10 минут. a) Как с их помощью отмерить ровно 15 минут? b) А как отмерить 15 минут после полудня, не трогая часы до полудня?

144. Зарплату сначала уменьшили на 20 процентов, а потом увеличили на 20 процентов. a) увеличилась она или уменьшилась? b) Сколько процентов она составляет теперь от исходной зарплаты?

145. Среди следующих утверждений одно неверно. a) Найдите его. b) Докажите, что остальные верны.

- если число делится на 5 и на 7, то оно делится на 35.
- если число делится на 6 и на 5, то оно делится на 30.
- если число делится на 8 и на 10, то оно делится на 80.

146. На поле чудес растут деревья с золотыми монетами. Каждую ночь на каждом дереве вырастает по одной новой монете. 1 декабря на деревьях было всего 1000 монет. В один из дней декабря Буратино посадил еще одно дерево, и 31 декабря на деревьях оказалось всего 2002 монеты. В какой день Буратино посадил дерево?

147. Докажите, что произведение любых a) двух b) трех последовательных натуральных чисел делится a) на 2; b) на 6.

148. За какое наименьшее количество распилов можно распилить прямоугольник 4×5 на единичные квадратики, если отпиленные части можно накладывать друг на друга и пилить вместе?

149. Кубик с ребром 3, сделанный из белой пластмассы, покрасили снаружи черной краской, а потом распилили на единичные кубики. Сколько из них имеет a) 0; b) 1; c) 2; d) 3 черные грани?

150. Какое наибольшее число не бьющих друг друга коней можно расставить на шахматной доске 8×8?

151. Выяснив, что квадрат 10×10 нельзя разрезать на фигуры (см. 116) Вася решил разрезать этот квадрат на 15 фигур и 10 фигур . Получится ли это у Васи?

152. Найдите все такие пары натуральных чисел x и y, что $x^2 = y^2 + 38$.

153. В компании 19 человек, некоторые их которых знакомы между собой. Докажите, что есть человек, у которого четное число знакомых.

154. В какое наименьшее число цветов нужно покрасить клетки квадрата 6×6 так, чтобы любые две клетки, имеющие общую точку, были покрашены в разные цвета?

155. Из двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке и получился точный квадрат. Квадрат какого числа мог получиться?

156. На ребрах куба расставили натуральные числа от 1 до 12 и посчитали суммы чисел на ребрах, входящих в каждую вершину. Докажите, что все восемь полученных сумм не могут быть одинаковыми.

157. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на a) 8; b) 24.

158. Круг разбит на шесть секторов, в одном из которых стоит единица, а в остальных нули. Разрешается прибавлять по единице к числам, стоящим в соседних секторах. Можно ли сделать все числа a) равными? b) четными?

159. Можно ли купюру в 5 долларов разменять на 20 монет достоинством 5, 20 и 50 центов?

160. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигуры вида ?

161. Девять книг стоят меньше 10 рублей, а десять книг стоят больше 11 рублей. Сколько стоит одна книга?

162. Вася решил пример на умножение: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{eeff}$ (разными буквами обозначены разные цифры). Докажите, что Вася ошибся.

163. Как с помощью песочных часов на 7 и 11 минут отмерить 15 минут после полудня, если трогать часы до полудня запрещается?

164. Вася собирается на банкет и достает из темного шкафа носки. В шкафу вперемешку лежат 20 белых и 20 черных носков. Определить цвет на ощупь нельзя.)Какое наименьшее количество носков нужно достать Васе из шкафа, чтобы наверняка получить a) пару одного цвета? b) пару белого цвета?

165. Умная Маша с вымытой шеей решала пример $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + 100 \cdot 101 \cdot 102$ и получила a) 253436547650 b) 253436547651 c) 6534450. Докажите, что она все время ошибалась.

166. Докажите, что бумажный квадрат 3×3 можно сложить так, чтобы одним взмахом ножниц разрезать его на единичные квадратики.

167. На прямой через равные промежутки расположены кочки. За один прыжок лягушонок прыгает на соседнюю кочку. Может ли он вернуться на исходную кочку за a) 2001 прыжок? b) 2002 прыжка?

168. На гранях куба написаны натуральные числа от одного до шести. Для каждой вершины куба посчитали сумму чисел на гранях, содержащих эту вершину. Могли ли все восемь получившихся сумм оказаться равными?

169. На двух крайних клетках полоски 1×2002 лежит две шишки. Своим ходом Вася может сдвинуть левую шишку на 1 или 2 клетки вправо, а Петя может правую шишку сдвинуть на 1 или

2 клетки влево. Перепрыгивать через другую шишку нельзя. Первым ходит Вася, а проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

170. Круг разбит на шесть секторов, в одном из которых стоит единица, а в остальных - нули. Разрешается прибавлять по единице к числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли такими операциями сделать все числа делящимися на три?

171. Цифры a и b таковы, что $a + b$ делится на 7. Докажите, что $\overline{aba}$ делится на 7.

172. На олимпиаде кружковцы обменялись рукопожатиями (не обязательно каждый с каждым). Докажите, что количество кружковцев, сделавших нечетное количество рукопожатий, четно.

173. Куб с ребром четыре, сделанный из белой пластмассы, покрасили снаружи черной краской и распилили на единичные кубики. Сколько из них имеют a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 черных грани?

174. Васе кроме носков нужны еще и ботинки. В темном шкафу лежит 10 пар черных и 10 пар коричневых ботинок. На ощупь нельзя определить ни цвет ботинка, ни то, на какую он ногу. Какое наименьшее число ботинок ему нужно вытащить из шкафа, чтобы среди них наверняка оказалась годная пара (то есть левый и правый ботинок одного цвета)?

175. a) Докажите, что квадрат 5×5 можно за 6 распилов с наложениями распилить на единичные квадратики. b) Докажите, что за меньшее количество распилов это сделать нельзя.

176. Найдите значение суммы $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$.

1.(177) В лесу на поляне Баба-Яга и Снегурочка играют в игру: по очереди выкладывают на снег от 1 до 6 шишек. Первой ходит Баба-Яга. Выигрывает тот, после чьего хода на снегу окажется 2002 шишки. Если выиграет Баба-Яга, то Дед Мороз не придет, елка не загорится, Новый Год не наступит. Будет ли встреча Нового Года?

2. (178) На новогодней елке Дед Мороз и Кащей Бессмертный по очереди заменяют звездочки на цифры. Первым ходит Кащей Бессмертный. Дед Мороз выиграет, если все равенства будут верными, а Кащей Бессмертный — если хотя бы одно будет неверно. Если Дед Мороз проиграет, то елка не загорится, Новый Год не наступит. Будет ли встреча Нового Года?

3.(179) Если Кащей Бессмертный составит число, произведение цифр которого равно 2002, то то Дед Мороз не придет, елка не загорится Новый Год не наступит. Будет ли встреча Нового Года?

4.(180) В клетчатом прямоугольнике 2001×2002 в каждой клетке стоит + или -. В каждой строчке плюсов больше чем минусов. Докажите, что есть столбец, в котором плюсов больше чем минусов.

5.(181) Имеется 24 килограмма счастья в Новом году, из которых 9 причитается Бабе-Яге. Под предлогом того, что на чашечных весах без гирь невозможно получить ровно 9 килограмм, Баба-Яга хочет забрать все. Дед Мороз утверждает, что на самом деле сделать это можно. Докажите, что Дед Мороз прав.

6.(182) В лесу живет два племени лесных эльфов: "Дедоморозовцыкоторые всегда говорят правду и "Бабкоежкинцыкоторые всегда лгут. Эльфов из первого племени в два раза больше, чем эльфов из второго племени. Может ли в лесу жить всего 2002 эльфа?

7.(183) Два эльфа пришли к Снегурочке за подарком. На вопрос о том, из каких они племен, один из них заявил: "Оба мы лжецы". Кто есть кто?

8.(184) Два елочных базара охраняют бригады сторожей. Каждый базар — одинаковое число бригад. В каждой бригаде одинаковое число сторожей. Все сторожа проспали ночей больше чем количество бригад, охраняющих один елочный базар, но меньше, чем сторожей в бригаде. Всего все вместе проспали 2002 человеко-ночи. Сколько сторожей в бригаде?

9.(185) В ряд стоят 8 мешков с подарками, в двух соседних мешках количество подарков отличается на один. Может ли там всего быть 225 подарков?

10.(186) У Бабы-Яги есть карточки с цифрами 1,3,9,9,4,5,5, из которых она хочет составить число, являющееся точным квадратом четного числа. Если она сможет это сделать, то Дед Мороз не придет, елка не загорится, Новый Год не наступит. Будет ли встреча Нового Года?

11.(187) Докажите, что черная лошадь не может, начав с левого нижнего угла, ходом шахматного коня обойти квадрат 2001×2001 и вернуться на исходную клетку.

12.(188) В лесу 21 поляна, некоторые из которых соединены тропинками. С каждой поляны выходит 10 тропинок. Докажите, что Дед Мороз может с любой поляны по тропинкам попасть на любую (возможно, по пути заходя на другие поляны).

189. Клетчатый прямоугольник без остатка удалось разрезать на уголки из трех клеток. Докажите, что этот прямоугольник можно разрезать на прямоугольники 1×3.

190. Какие остатки может давать n^4 от деления на 5?

191. Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 1 доллару 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 70 центов за штуку и бифштекс за 2 доллара 80 центов. Бармен сказал, что с ковбоя причитается 11 долларов 50 центов. Ковбой Джо застрелил бармена. Докажите, что было за что (бармен его обсчитал).

192. Докажите, пользуясь формулами суммы и разности квадратов, что числа a) $2^8 + 2^5 + 1$ b) $2^8 - 2^5 + 1$ c) $2^{16} + 2^9 + 1$ d) $2^{16} - 2^9 + 1$ — составные.

193. Вася решал пример на умножение: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}$ (разными буквами обозначены разные цифры). Докажите, что Вася опять ошибся.

194. Круг разбит на 6 секторов, в одном из которых стоит единица, а в остальных — нули. Разрешается прибавлять по единице к числам, стоящим в двух соседних или в двух противоположных секторах. Можно ли такими операциями сделать все числа a) четными? b) равными? c) делящимися на 3?

195. Есть 16 одинаковых на вид шаров, один из которых радиоактивный. Если детектор поднести к кучке шаров, то он покажет есть ли так радиоактивный шар. Докажите, что a) за 4 проверки можно наверняка найти радиоактивный шар b) за три проверки наверняка найти радиоактивный шар нельзя.

196. В темном шкафу лежат ботинки: 10 черных и 10 коричневых пар (см задачу 174). Какое наименьшее количество ботинок нужно вытащить из шкафа, чтобы наверняка получить черную пару (черный ботинок на левую и черный ботинок на правую ногу)?

197. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ делится a) на 3 b) на 6.

198. Докажите, что значение суммы первых n нечетных чисел $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ равно n^2.

199. Найдите все пары натуральных чисел x и y такие, что $y^2 = x^2 + 28$.

200. На ребрах куба расставили натуральные числа от 1 до 12 и посчитали суммы чисел, стоящих на ребрах, которые ограничивают каждую грань. Могло ли так случится, что все шесть полученных сумм будут равными?

201. Перемножили сумму цифр и произведение цифр некоторого двузначного числа. Какой наибольший и наименьший результат мог получиться?

202. В некотором числе переставили цифры, и из большего из полученных чисел вычли меньшее. Докажите, что разность делится на 9.

203. Вася решил пример на умножение: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{effe}$ (разными буквами обозначены разные цифры). Докажите, что Вася и в этот раз ошибся.

204. Докажите, что квадрат 5×5 с вырезанной угловой клеткой нельзя разрезать на прямоугольники 1×3.

205. В прямоугольнике $m \times n$ расставлены числа так, что суммы чисел во всех строчках и суммы чисел во всех столбцах равны между собой. Докажите, что $m = n$.

206. Докажите, что число $2^8 + 2^5 \cdot 7^3 + 7^6$ является составным.

207. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по диагоналям клеток. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

208. В табуне 70 лошадей и 8 верблюдов. Хозяин может продать несколько верблюдов так, чтобы части вырученных денег хватило на 14 лошадей. Вместо этого хозяин хочет продать все и, добавив не более 11 золотых, купить 50 верблюдов. Докажите, что он не сможет этого сделать (верблюд и лошадь стоят целое число золотых).

209. Среди следующих утверждений одно неверно. a) Найдите его. b) Докажите, что остальные верны.

- если число делится на 5 и на 11, то оно делится на 55.

- если число делится на 12 и на 15, то оно делится на 180.

- если число делится на 20 и на 21, то оно делится на 420.

210. На доске написаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Докажите, что число, которое останется после 99 таких операций, может быть только четным.

211. Натуральное число ровно в 9 раз больше суммы своих цифр. Докажите, что это число делится a) на 9. b) на 81.

212. Можно ли составить три несократимые дроби, произведение которых равно 1, использовав в качестве числителей и знаменателей этих дробей шесть чисел из набора 1,2,3,4,5,6,7,8,9? (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

213. В стране 8 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города и не проходит через другие города). Жители каждого города посчитали количество дорог, выходящих из этого города. Могли ли у жителей этой страны получится наборы a) 8,6,5,4,4,3,2,2? b) 7,7,6,5,4,2,2,1? c) 6,6,6,5,5,3,2,2? d) 5,5,4,4,2,2,2,2?

214. После нескольких ходов конь вернулся на исходное поле. Докажите, что число ходов было четным.

215. Докажите, что квадрат 7×7 a) нельзя за 5 распилов с наложениями распилить на единичные квадратики. b) А за 8 — можно.

216. На столе в ряд лежит 11 пирожных. Вася и Петя по очереди съедают либо одно, либо два соседних пирожных, первым ходит Вася. Выигрывает тот, кто съедает последнее пирожное. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

217. Найдите все простые p, такие, что $p^2 + 7$ — точный квадрат.

218. В полоске 1×100 стоит 51 фишка. Докажите, что какие-то две фишки стоят в соседних клетках.

219. Докажите, что любую сумму, большую 7 копеек, можно выдать только монетами по 3 и 5 копеек.

220. На столе в ряд стоят 10 стаканов, 5 из них — вверх дном. Можно ли, переворачивая по два стакана, поставить все стаканы одинаково?

221. Что больше: 2^{30} или 3^{20}?

222. Докажите, что число $\overline{abcabc}$ делится на 77.

223. Какую клетку нужно вырезать из квадрата 5×5 так, чтобы оставшуюся фигуру можно было разрезать на прямоугольники ?

224. На столе в ряд лежат 12 пирожных. Вася и Петя по очереди съедают либо одно, либо два соседних пирожных, первым ходит Вася. Выигрывает тот, кто съедает последнее пирожное. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

225. У чисел N и $2N$ одинаковые суммы цифр. Докажите, что N делится на 9.

226. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по сторонам клеток. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

227. Какое наименьшее количество королей нужно поставить на доску 9×9 так, чтобы они били все остальные клетки?

228. Найдите сумму: $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$.

229. Можно ли раскрасить квадрат 6×6 в шесть цветов так, чтобы в любом прямоугольнике 3×2 и 2×3 встречались все 6 цветов?

230. a, b и c — различные цифры, среди которых нет нуля. Из них составили всевозможные двузначные числа и эти числа сложили. Может ли сумма быть равна 132?

231. Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 5040. Найдите эти числа.

232. На столе в ряд стоит 10 стаканов, 5 из них — вверх дном. Можно ли, переворачивая по четыре стакана, поставить все стаканы одинаково?

233. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по диагоналям прямоугольников 1×2. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

234. Имеется набор гирь: 2 гири массой 1 г., 2 гири массой 2 г., …, 2 гири массой 100 г. и несколько чашечных весов. Вася и Петя по очереди кладут гири на чашки весов, за ход разрешается положить ровно одну гирю. Первым ходит Вася. Петя выиграет, если после того, как все гири будут выставлены, все весы будут в равновесии, а Вася — в противном случае. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

235. Можно ли натуральные числа от 1 до 21 разбить на несколько групп так, чтобы a) наибольшее из чисел каждой группы было равно сумме остальных чисел этой группы? b) произведения чисел в каждой группе были равны между собой? c) суммы чисел в каждой группе были равны между собой?

236. Существует ли замкнутая 5-звенная ломаная, каждое звено которой пересекает a) ровно 1 другое звено? b) ровно 2 других звена?

237. В кружке каждая девочка дружит a) с двумя b) с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит ровно с одной девочкой. Докажите, что число кружковцев делится a) на 3. b) на 4.

238. Натуральное число разрешается умножать на 2 и произвольным образом переставлять в нем цифры (запрещается только ставить нуль на первое место). Докажите, что такими операциями нельзя получить из числа 1 число 118.

239. Можно ли натуральные от 1 до 20 разбить на десять пар так, чтобы разность чисел в первой паре была равна 1, во второй паре — 2, …, в десятой паре — 10?

240. Какое наименьшее количество королей нужно поставить на доску a) 8×8 b) 10×10 так, чтобы они били все остальные клетки?

241. В стране n городов, любые два соединены беспосадочными авиалиниями. Сколько всего в этой стране авиалиний?

242. Вася и Петя играю в игру: имеется две кучи конфет a) в обеих по 16 конфет; b) в одной — 16, а в другой — 17 конфет. За ход разрешается съесть сколько угодно конфет, но только из одной кучи. Выигрывает тот, кто съест последнюю конфету, Вася ходит первый. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

243. На клетчатом листе закрашено 25 клеток. Докажите, что есть закрашенная клетка, у которой либо 0, либо 2, либо 4 соседних по стороне клетки закрашены.

244. Найдите все пары натуральных чисел x и y такие, что $4x^2 - y^2 = 19$.

245. В кружке у каждого ученика не более трех врагов. Докажите, что кружок можно разделить на четыре группы, так что ни у кого не будет врагов в своей группе.

246. Есть несколько равных равносторонних треугольников, в вершинах которых написаны числа 1, 2, и 3. Докажите, что их нельзя сложить в стопку так, чтобы сумма чисел вдоль каждого ребра стопки была равна 55.

247. Какую клетку нужно вырезать из квадрата 8×8 так, чтобы оставшуюся фигуру можно было разрезать на прямоугольники 1×3 ?

248. В лесу, состоящем из дубов и елок, компания "Пень-Инвест"вырубила одну треть всех дубов и одну шестую всех елок. Докажите, что отчет экологической организации "Зеленый мститель утверждающий, что вырублена половина всех деревьев, содержит неверные данные.

249. Пятачок, Сова, Кролик и Винни-Пух съели вместе 85 желудей, каждый съел хотя бы один. Пятачок съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 55 желудей. Сколько желудей съел Винни-Пух?

250. На доске написано число 81. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 15. Что окажется на доске через час?

251. Умная Маша решала пример на умножение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$. В полученном ответе Вася поставил на одну из цифр кляксу: 24*6304230000. Докажите, что Маша может восстановить эту цифру, не повторяя вычислений.

252. Имеется несколько равных равносторонних треугольников, в вершинах которых написаны числа 1,2 и 3. Правда ли что их можно сложить в стопку так, чтобы сумма чисел вдоль каждого ребра была равна a) 4? b) 6? c) любому четному числу, большему двух?

253. Натуральные числа a и b таковы, что $3a + 2b$ делится на 5. Докажите, что $2a + 3b$ делится на 5.

254. Докажите, что квадрат можно без остатка разрезать на a) 6 b) 7 c) 8 квадратов (не обязательно равных).

255. На клетчатом болоте лягушонок прыгает по диагоналям прямоугольников 1×3. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может лишь за четное число прыжков.

256. Имеется шоколадка 5×6 . Вася и Петя по очереди ломают один из имеющихся кусков на два. Первым ходит Вася. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

257. Существует ли замкнутая 6-звенная ломаная, каждое звено которой пересечено ровно одним другим звеном?

258. В кружке каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. Докажите, что число кружковцев делится на 5.

259. Что больше: 7^{56} или 50^{28} ?

260. Докажите, что в квадрате 10×10 нельзя расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом уголке из трех клеток была равна 10.

261. Какое наименьшее количество дорог должно быть в стране из 5 городов, чтобы из любого города можно было добраться до любого (возможно, с пересадками)?

262. Докажите, что число 20! — не точный квадрат. (Напоминание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

263. В карьере добыли 50 плит весом 7 тонн и 100 плит весом 9 тонн. Грузоподъемность одной платформы — 50 тонн. Какое наименьшее число платформ потребуется, чтобы увезти все плиты?

264. Докажите и запомните формулу: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

265. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с шести.

266. Двое по очереди двигают по шахматной доске 8×8 начиная с поля $a1$ "Хромого короля" — фигуру, которая ходит только вправо и вверх. Проигрывает тот, кто не сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

267. Имеется набор гирь весом от 1 до 21 грамма, по одной гири каждого веса. Двое по очереди выставляют на чашечные весы эти гири. Первый выиграет, если после того, как все гири будут выставлены, весы будут в равновесии, а второй — в противном случае. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

268. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые — нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого шляпы в этот момент не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?

269. В Монголии имеются в обращении монеты в 3 и 5 тугриков. Входной билет в парк стоит 4 тугрика. Как-то перед открытием в кассу парка выстроилась очередь из 200 человек. У каждого из них, а также у кассира есть ровно 22 тугрика. Докажите, что все посетители смогут купить билет в порядке очереди.

270. Три последовательных двузначных числа выписали друг за другом. Оказалось, что полученное шестизначное число делится на 17. Каким оно может быть?

271. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30 процентов — налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, — развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

272. Докажите и запомните формулу $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

273. В карьере добыли 200 плит: 120 — весом 7 тонн, а остальные — весом 9 тонн. Какое наименьшее число платформ, грузоподъемностью 40 тонн, потребуется, чтобы увезти все плиты?

274. Двое по очереди двигают по доске a) 3×3 b) 4×4 начиная с левого нижнего угла "Почти Хромого Короля" — фигуру, которая ходит вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх на одну клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

275. В кружке больше 20, но меньше 30 человек. Каждый мальчик дружит с двумя девочками, а каждая девочка — с тремя мальчиками. Сколько в кружке человек?

276. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по диагоналям прямоугольников 2×3. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

277. Чему равно 20!: 2432902008176640000 или 2432902008146640000?

278. Имеется шоколадка 5×5. Двое по очереди ломают один из имеющихся кусков на два. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

279. Докажите, что $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

280. Натуральные числа a и b таковы, что $34a = 43b$. Докажите, что $a + b$ делится на 77.

281. По кругу расставлены 200 единиц. Каждую минуту в течение часа Федя выбирал какие-нибудь двенадцать подряд идущих чисел, менял у каждого числа знак и записывал на те же места в обратном порядке. По истечении часа Саша поменял знак у 100 чисел, идущих через одно. Сколько единиц могло получиться в результате?

282. Произведение 25 чисел оканчивается на 25. Докажите, что среди них найдется 3 числа, произведение которых тоже оканчивается на 25.

283. На сколько нулей оканчивается 100! ?

284. Докажите и запомните формулы a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

285. К трехзначному числу x приписали трехзначное число $999 - x$. Докажите, что полученное шестизначное число делится на 37.

286. Двое по очереди ставят в клетки полоски 1×101 плюсы и минусы. Проигрывает тот, кто поставит знак рядом с противоположным. Если этого не случилось, а вся полоска заполнена, то выигрывает первый. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

287. Найдите все простые p такие, что $p^4 - 606$ — тоже простое.

288. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по диагоналям квадратов 2×2. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

289. В графе степень каждой вершине не больше 3. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

290. Имеются гири весом $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n$. Можно ли a) разбить их на два набора равного веса? b) выбрать из них два набора равного веса?

291. Найдите все такие n, что $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ — простое.

292. Из доски 8×8 вырезали 12 прямоугольников . Верно ли, что из оставшейся части всегда можно вырезать прямоугольник ?

293. По кругу стоят 10 чисел (не обязательно целых!). Сумма любых трех подряд стоящих чисел равна 3. Докажите, что все числа — единицы.

294. Вершины графа раскрашены в синий и зеленый цвета. Каждая синяя вершина соединена с 5 синими и 10 зелеными, а каждая зеленая — с 9 синими и 6 зелеными. Каких вершин больше: синих или зеленых?

1(295). В марте 1531 года Скупой рыцарь каждый день спускался в подвал и добавлял в свой, почти уже полный сундук от 1 до 15 монет. Потом он пересчитывал монеты, и каждый раз оказывалось, что их количество делится либо на 31, либо на 34. Докажите, что Рыцарь потерял счет своим сокровищам.

2(296). Рома задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру, полученное число умножил на 8, опять зачеркнул последнюю цифру и получил 20. Какое число задумал Рома?

3(297). У двух пиратов есть слитки золота весом $1, 2, 3, \ldots, n$ килограммов. Докажите, что при $n = 4k$ или $n = 4k + 1$ пираты могут разделить золото поровну, не распиливая слитки.

4(298). По кругу расставлены 50 точек: 25 красных и 25 синих. Разрешается выбирать 6 подряд стоящих точек и перекрашивать их: синие в красные, а красные — в синие. Можно ли такими операциями сделать все точки одного цвета?

5(299). В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (не обязательно целые) так, что в любой строчке и в любом столбце сумма чисел равна 2, а в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна 3. Какие числа стоят в квадрате?

6(300). 100 грустных мартышек кидаются друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше уже не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры — веселых или грустных к моменту, когда в игре осталась одна мартышка?

7(301). Двое по очереди ставят королей на доску 9×9 так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может хода. Кто из игроков имеет выигрышную страгетгию?

8(302). Сумма трех чисел равна 439. Может ли их произведение оканчиваться на шесть нулей?

9(303). Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить на доске 8×8 так, чтобы в любом прямоугольнике 1×3 была хотя бы одна закрашенная клетка?

10(304). Сумма двух натуральных чисел равна 1001. Докажите, что их произведение не делится на 1001.

305. У числа 100! вычеркнули все нули в конце. Четная или нечетная последняя не вычеркнутая цифра?

306. Сумма трех чисел равна 239. На какое наибольшее количество нулей может заканчиваться их произведение?

307. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа так, что в любой строчке и столбце сумма равна 6, а в любом квадрате 2×2 — 9. Какие числа стоят в квадрате?

308. Найдите все натуральные x такие, что $x^3 + 1$ — простое.

309. У всех квадратов от 1 до 1000000 посчитали сумму цифр. Каких результатов больше — 9 или 8?

310. Двое по очереди закрашивают клетки в квадрате 7×7 так, чтобы у закрашенной клетки все соседи по стороне были не закрашены. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

311. Найдите сумму a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

312. Какое наименьшее количество выстрелов нужно нанести по доске 8×8, чтобы наверняка попасть в линкор 1×4?

313. В стране несколько городов, некоторые из которых связаны авиалиниями. Из столицы выходит 9 авиалиний, из города Дальнего — 1, а из остальных городов — по две. Докажите, что из столицы можно добраться до города Дальнего (возможно, с пересадками).

314. На доске написано несколько $+$ и несколько $-$. Разрешается два одинаковых знака заменять на $+$, а два разных — на $-$. Докажите, что оставшийся в конце знак не зависит от порядка операций.

315. 20 кружковцев решали 20 задач. Каждый кружковец решил две задачи, каждую задачу решило два кружковца. Докажите, что можно организовать разбор так, чтобы каждый кружковец рассказал ровно одну задачу и все задачи оказались разобранными.

316. К дню Рождения Малыша мама печет пирог. У нее имеется четыре заготовки для пирога: a) круглая b) квадратная c) треугольная d) шестиугольная. Докажите, что какой бы пирог мама не испекла, Малыш сможет разрезать его на три равных по форме и размеру куска, для Кристера, Гуниллы и себя.

317. Докажите, что если точный квадрат оканчивается на 6, то его предпоследняя цифра нечетна.

318. 20 человек собрали 180 грибов. Докажите, что есть двое, собравшие одинаковое количество грибов.

319. Найдите все такие натуральные x, что $x^3 - 1$ — простое.

320. В стране 2000 жителей. При встрече один разменивает другому 10 копеек на два пятачка. Могло ли так случиться, что за неделю каждый отдал при таких разменах ровно 10 монет?

321. Докажите, что числа a) 8001 b) 27001 c) 343001 — составные.

322. Двое по очереди кладут на доску 100×100 квадраты 2×2 по клеткам без наложений. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

323. Докажите и запомните формулу $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

324. Существуют ли a) две b) три c) четыре не обязательно различные цифры, такие что их сумма равна их произведению?

325. На сколько нулей оканчивается 125! ?

326. К Малышу на День Рождения (см. 316) прилетел Карлсон. Докажите, что любой торт Малыш сможет разрезать и на 4 равных по форме и размеру куска.

327. Докажите, что если квадрат оканчивается на 5, то он оканчивается на 25.

328. На блюде лежало несколько плюшек. Иногда прилетает Карлсон, пересчитывает плюшки и съедает ровно одну треть. После того, как Карлсон прилетал три раза, на блюде осталось 8 плюшек. Сколько плюшек было на блюде в начале?

329. Докажите, что у любой степени числа 19 сумма цифр не меньше 10.

330. Пираты могут разделить на троих поровну слитки весом $1, 2, \ldots, n$ килограммов. Докажите, что если добавить слитки весом $n+1, n+2, \ldots, n+6$, то они все равно смогут разделить золото на троих.

331. Двое по очереди кладут на круглый стол пятаки так, чтобы пятаки не накладывались и не свисали со стола. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

332. В стране из города Дальнего выходит 1 авиалиния, из столицы — 9, а из остальных городов — четное число. Докажите, что из столицы можно добраться до города Дальнего (возможно, с пересадками).

333. Круг разбит на 8 секторов, в одном из которых стоит 1, а в остальных — 0. Разрешается увеличивать на 1 числа, стоящие в секторах через один. Можно ли такими операциями сделать все числа a) четным; b) делящимися на три?

334. Докажите, что на доске 10×10 нельзя расставить числа от 1 до 100 так, чтобы в любом уголке из трех клеток сумма делилась на три.

1(335). На доске 9×9 стоит 25 фишек симметрично относительно центральной клетки. Докажите, что в центральной клетке стоит фишка.

2(336). За круглым столом сидят 25 человек — 51 мальчик и 49 девочек. Докажите, что найдутся два мальчика, сидящие напротив друг друга.

3(337). На лесной поляне встретились трое: эльф, хоббит и гоблин. Эльфы всегда говорят правду, гоблины всегда лгут, а хоббит не может ни солгать, ни сказать правду два раза подряд. На поляне произошел следующий разговор:

Первый(остальным): Вы оба — не эльфы. А я — эльф.

Второй(остальным): Я не эльф. (первому) И ты тоже.

Третий (остальным): Все что вы тут наговорили — вранье. Только я — эльф.

Кто есть кто?

4(338). В полоске 1×20 стоит 20 фишек. За ход можно поменять две фишки стоящие через одну клетку местами. Можно ли все фишки поставить в обратном порядке?

5(339). 10 невоспитанных верблюдов плюются друг в друга. Каждый плюнул ровно в пятерых. Докажите, что есть верблюд, в которого плюнуло хотя бы пятеро.

6(340). В квадрате 4×4 угловая клетка — черная, а остальные — белые. За ход разрешается перекрасить одну строчку или один столбец. Докажите, что нельзя все клетки сделать одинаковыми.

7(341). Круг разбит на 6 секторов: в двух соседних лежат два шара — черный и белый. За ход разрешается переставить любой шар в сектор через один, если он не занят. Сколько различный расстановок шаров в круге можно получить такими операциями?

8(342). Что больше 4^{30} или 15^{15} ?

9(343). При каких натуральных x число $x^3 - 27$ — простое?

10(344). Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 2002: делящихся на 9, но не делящихся на 8 или делящихся на 8, но не делящихся на 9?

11(345). В некотором месяце три воскресения пришлись на четные числа. Каким днем недели было 17-ое число этого месяца?

12(346). Несколько первых простых чисел перемножили и получили результат $678978*0$. Какая цифра пропущена?

347. Сколько существует среди чисел от 1 до 1000 чисел, которые a) делятся на 2; b) делятся на 3; c) делятся на 2, но не делятся на 3; d) делятся на 3, но не делятся на 2; e) делятся на 2 и на 3; f) не делятся ни на 2, ни на 3.

348. В полоске 1×22 стоит 22 фишки. Разрешается менять любые две фишки, стоящие через две. Можно ли такими операциями поставить все фишки в обратном порядке?

349. Имеются слитки золота весом от 1 до a) 10 b) 11 килограммов. На какое количество пиратов это золото можно поделить поровну не распиливая слитки?

350. В квадрате 4×4 одна клетка — черная, а остальные — белые. Разрешается перекрашивать клетки в квадрате 2×2. Можно ли такими операциями сделать все клетки одинаковыми?

351. Докажите, что числа a) $\overline{aaabbb}$ b) $\overline{ababab}$ — делятся на 37.

352. На одной чашке весов лежит груз весом в целое число граммов, не более 63. Докажите, что имея гири весом 1, 2, 4, 8, 16, 32 грамма, можно узнать его вес.

353. Можно ли из первых a) 9 b) 16 простых чисел составить квадрат a) 3×3 b) 4×4, в котором суммы чисел в строчках и столбцах все равны между собой.

354. a) Докажите, что в любом графе с n вершинами есть две вершины одинаковой степени. b) Верно ли, что при $n > 3$ графе с n вершинами всегда есть 3 вершины одинаковой степени?

355. Докажите что числа a) 7999 b) 26999 c) 342999 — составные.

356. Какая из сумм больше и насколько: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ или $0\cdot2+1\cdot3+2\cdot4+\cdots+(n-1)\cdot(n+1)$?

357. a, b, c — целые числа. Могут ли их попарные суммы равняться a) 6, 7, 8 b) 7, 8, 9 ?

358. В СССР были монеты достоинством 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль. Автомат разменивает любую монету начиная с 5 копеек на 4 монеты. Докажите, что 1 рубль всегда можно разменять на 34 монеты.

359. На международном конгрессе встретилось n математиков. Любые трое могут поговорить (возможно, один из них будет переводить двум другим). Докажите, что можно всех математиков расселить в двухместные номера так, что любые двое живущие вместе могут общаться без переводчика при a) $n = 4$ b) $n = 100$ c) $n = 102$.

360. Докажите, что хотя бы одна из двух последних цифр квадрата четная.

361. a) Докажите, что при $n = 3k$ и $n = 3k+2$ при условии, что $n > 3$, три пирата могут поделить слитки золота весом от 1 до n килограммов не распиливая их. b) Докажите, что при остальных n это сделать нельзя.

362. Есть 6 полок длиной 1 метр каждая и 150 книг. Можно ли расставить все книги на 6 полках, если есть a) 51 книга толщиной 6 см., остальные — толщиной 3 см. b) 50 книг толщиной 6 см, а остальные — толщиной 3 см. c) 49 книг толщиной 6 см, а остальные — толщиной 6 см. d) 48 книг толщиной 6 см., а остальные — толщиной 3 см. ?

363. На доске 10×10 расставлены числа (не обязательно целые) так, что в любой фигуре вида сумма стоящих в ней чисел равна 4. Докажите, что все числа равны 1.

364. В графе из n вершин есть вершина степени $n-1$. Докажите, что этот граф связен.

365. При каких n квадрат $n \times n$ можно разрезать на a) квадраты 2×2 b) прямоугольники 1×4?

366. В квадрате 3×3 угловая клетка черная, а остальные — белые. Разрешается перекрашивать клетки в любой строчке и любом столбце. Докажите, что такими операциями нельзя сделать все клетки одинаковыми.

367. Найдите все квадраты, десятичная запись которых состоит только из нечетных цифр.

368. В одной из вершин куба стоит 1, а в остальных — 0. Разрешается прибавлять по единице к числам, стоящим на концах одного ребра. Можно ли такими операциями сделать все числа a) четными b) равными c) делящимися на 3?

369. Найдите все натуральные n такие, что квадрат $n \times n$ можно разрезать на фигуры вида .

370. В стране 15 городов, из каждого выходит хотя бы 7 авиалиний. Докажите, a) что из любого города можно попасть в любой. b) Это можно сделать не более чем с одной пересадкой.

371. Докажите, что любая замкнутая ломанная, идущая по сторонам клеток, имеет четную длину.

372. На доске 4×4 лежит 12 доминошек так, что вся доска покрыта. Верно ли, что всегда есть доминошка, после снятия которой, доска все равно будет покрыта полностью?

373. a) Какие остатки от деления на 4 может давать сумма двух квадратов? b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух квадратов.

374. На скольких пиратов можно поровну поделить слитки весом от 1 до 12 килограммов не распиливая их?

375. На доске 6×7 закрашено 25 клеток. Докажите, что есть квадрат 2×2, в котором закрашено не менее 3 клеток.

376. Докажите, что гирями весом $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$ граммов можно взвесить любой целый вес от 1 до $2^n - 1$ граммов.

377. Двузначное число поделили на сумму его цифр. Какой наименьший и наибольший результат мог получиться?

378. В классе 30 человек: 20 имеют двойку по алгебре, а 25 — по геометрии. Какое a) наименьшее b) наибольшее количество учеников имеют двойку по обеим наукам?

379. a) Докажите что гирями весом 1, 3, 9 граммов можно взвесить любой целый вес от 1 до 13 граммов. b) При каком наибольшем натуральном n любой целый вес от 1 до n можно взвесить гирями 1, 3, 9, 27. (Гири можно класть на обе чашки весов.)

380. Сколько существует пятизначных чисел, сумма цифр которых a) 2; b) 3?

381. При каких натуральных n квадрат $n \times n$ можно разрезать на фигуры вида ?

382. Можно 55 телефонов соединить проводами так, чтобы из 1 телефона выходил 1 провод, из 2 телефонов — по 2 провода, ..., из 10 телефонов — по 10 проводов?

383. Сколько существует двузначных чисел, в десятичной записи которых a) ни одной пятерки? b) хотя бы одна пятерка?

384. На клетчатом листе нарисован квадрат 4×4 со всеми внутренними линиями. Сколько всего квадратов разного размера нарисовано?

385. На карточках написали числа от 1 до 17. Потом карточки перевернули, перемешали, из на другой стороне снова написали числа от 1 до 17. Затем на каждой карточке посчитали сумму чисел с обеих сторон, и эти суммы перемножили. Докажите, что получившееся произведение четное.

386. Докажите, что среди любых трех последовательных натуральных чисел есть одно, взаимно простое с двумя остальными.

387. По кругу стоят 7 чисел, сумма любых четырех подряд стоящих делится на 3. Докажите, что все числа делятся на 3.

388. Правильный треугольник, лежащий на плоскости, разрешается перекатывать через любую из его сторон. Докажите, что вернуть на исходную позицию его можно только за четное число таких операций.

389. По кругу стоит несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух своих соседей. Максимальное из этих чисел равно 100. Какие значения может принимать минимальное из этих чисел?

390. По кругу сидят 50 человек: 25 мужчин и 25 женщин. Докажите, что есть человек, оба соседа которого — женщины.

391. В стране несколько городов. Сеть авиалиний устроена так, что из любого города можно добраться до любого (возможно, с пересадками) только одним способом. Докажите, что есть город, из которого выходит ровно одна авиалиния.

392. Докажите, что а)$100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 - 24$ делится на 99 b) $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

393. Можно на плоскости расположить а) 5 b) 6 отрезков так, чтобы каждый отрезок пересекал ровно три других (никакие три отрезка не проходят через одну точку).

394. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел а) n и $n+1$; b) n и $n+2$ при нечетном n ?

395. Докажите и запомните формулы а) $(a^4-1) = (a-1)(a^3+a^2+a+1)$; b) $(a^n-1) = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$.

396. Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

397. Сколько существует а) трех- b) пятизначных чисел, в десятичной записи которых α) нет ни одной пятерки? β) есть хотя бы одна пятерка?

398. a и b — натуральные числа, такие, что a^2+b^2 делится а) на 3 b) на 4. Докажите, что а) a и b делятся на 3 b) a и b — четные.

399. При каких n натуральное число, составленное из n одинаковых ненулевых цифр делится на 11?

1(400). Перед Буратино три двери: красная, синяя и зеленая. За одной из них золотой ключик, за другой — пусто, а за третьей — злобный Карабас. На красной двери написано: "Золотой ключик здесь", на зеленой: "Здесь сидит Карабас", на синей: "За зеленой дверью пусто". Все три надписи не соответствуют действительности. За какой дверью золотой ключик?

2(401). Составьте из цифр 6, 7, 8, 9 два двузначных числа с максимальной суммой.

3(402). Можно ли квадрат 10×10 разрезать на 16 фигурок вида и 18 фигурок вида ?

4(403). Можно ли в квадрате 5×5 расставить числа от 1 до 25 так, чтобы в любой строчке сумма каких-то двух чисел была равна сумме остальных трех?

5(404). На плоскости нарисовано 5 прямых. Какое наибольшее число точек пересечения может быть у них?

6(405). Докажите, что число $\overline{abcabc}$ никогда не является точным квадратом.

7(406). На доске выписали квадраты чисел от 5 до 500. После этого у каждого числа на доске стерли все цифры, кроме двух последних. Каких двузначных чисел на доске больше: 60, 61 или 62?

8(407). В стране 100 городов, любые два соединены дорогой. 98 дорог закрыли на ремонт. Докажите, что из любого города можно доехать до любого.

9(408). По кругу сидят 50 человек: 25 женщин и 25 мужчин. Докажите, что есть человек, оба соседа которого — одного пола.

10(409). На доске 10×10 стоит 50 шашек: 25 в левом верхнем квадрате 5×5 и 25 — в правом нижнем квадрате 5×5. За ход одна из шашек может перепрыгнуть другую по горизонтали или вертикали. Можно ли такими операциями собрать все шашки в верхней половине доски?

11(410). Разложите на множители $c^2 + 2ab - a^2 - b^2$.

12(411). 7 детей съели 100 конфет. Докажите что какие-то три ребенка съели вместе хотя бы 40 конфет.

412. Что больше 36^{49} или 6^{100}?

413. Выведите формулу для $(a + b - c)^2$ и запомните ее.

414. Докажите, что при любом натуральном n числа n и $2n + 1$ взаимно просты.

415. Составьте из цифр 2, 3, 4, 5 два двузначных числа с минимальным произведением.

416. На плоскости нарисовано n прямых. Какое наибольшее число точек пересечение могут иметь эти прямые?

417. Из трех различных ненулевых цифр составили всевозможные двузначные числа с неповторяющимися цифрами и их сложили. Может ли получившаяся сумма быть точным квадратом?

418. В стране n городов, любые два связаны авиалинией. В целях экономии $n - 2$ авиалинии закрыли. Докажите, что из любого города можно добраться до любого.

419. 13 детей съели 200 конфет. Докажите, что есть три ребенка, съевшие вместе хотя бы 45 конфет.

420. На доске 10×10 стоит 50 шашек: 25 в левом верхнем квадрате 5×5 и 25 — в правом нижнем квадрате 5×5. За ход одна из шашек может перепрыгнуть другую по диагонали. Можно ли такими операциями собрать все шашки в верхней половине доски?

421. На плоскости стоит камень в форме правильного тетраэдра. За ход его можно перекатить через одно из его ребер. Докажите, что если тетраэдр вернулся на исходное место, то он стоит на той же грани, что и в начале.

422. По кругу стоят попарно различные числа. Докажите, что есть число, которое меньше обоих своих соседей.

423. На плоскости лежит бумажный треугольник. Разрешается перекатывать его через одну из его сторон. Докажите, что если треугольник вернется в исходное положение, то это случится через четное число операций, и все вершины будут лежать на тех же местах.

424. Какие остатки могут давать квадраты от деления на a) 7 b) 8 c) 9?

425. В строчку выписаны числа $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$. За ход разрешается поменять местами два соседних числа. Докажите, что такими операциями можно поменять местами a) числа 21 и 89 b) любые два числа, оставив все остальные на своих местах.

426. В СССР были монеты достоинством 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек. Автомат разменивает любую монету начиная с 3 копеек на три монеты. Докажите, что, начав с монеты в 50 копеек, можно получить a) 25 монет b) 27 монет.

427. В стране несколько городов, из каждого выходит ровно 15 дорог. В целях экономии на каждой дороге введено одностороннее движение. Докажите, что есть город, в который можно въехать хотя бы из восьми других городов.

428. Докажите, что среди пяти последовательных натуральных чисел есть одно, взаимно простое с остальными.

429. Найдите все такие тройки ненулевых, попарно различных цифр, что сумма всевозможных двузначных чисел с неравными цифрами, составленных из них равна точному квадрату.

430. На доске нарисован квадрат 3×3 со всеми внутренними линиями. Сколько нарисовано a) прямоугольников b) прямоугольников, не являющихся квадратами?

431. На концах полоски 1×30 стоит две фишки. Двое по очереди двигают каждый свою фишку на 1, 2 или 3 клетки в любом направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

432. На доске выписаны числа от 1 до 100. Разрешается стирать два числа и записывать на доску их сумму. a) Докажите, что число, оставшееся последним не зависит от порядка операций. b) Найдите его.

433. Можно ли на доске 8×8 расставить числа так, чтобы любое число было меньше хотя бы одного из своих соседей?

434. На доске выписаны числа от 1 до 100. За ход разрешается поменять местами два соседних. Докажите, что такими операциями можно получить любую наперед заданную расстановку.

435. В стране 12 городов, любые два связаны дорогой. Какое наименьшее количество дорог нужно закрыть так, чтобы эта страна распалась на две области, между которыми нет ни одной дороги?

436. На доске 8×8 в строки и столбцы пронумерованы и в каждой клетке написана сумма номера строки и столбца, в которых расположена эта клетка. На этой доске расставили 8 не бьющих друг друга ладей. Какой может быть сумма чисел, написанных под ладьями?

437. При каких натуральных n дроби a) $\frac{n+3}{n+5}$ b) $\frac{2n+1}{3n+1}$ могут быть сократимы?

438. a) Какие остатки может давать от деления на 8 сумма трех квадратов? b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов.

439. В стране 7 городов, некоторые соединены между собой дорогами. На дорогах ввели одностороннее движение так, что в любой город можно въехать и из любого выехать. Верно ли, что по этим дорогам можно из любого города добраться до любого?

440. Что больше 36^{50} или 216^{33}?

441. Из трех различных ненулевых цифр составили всевозможные трехзначные числа. a) Сколько их получилось? b) Может ли их сумма быть точным квадратом?

442. Замок имеет форму правильного треугольника, каждая стена поделена на 5 равных отрезков. Стенками, параллельными главным стенам, замок разгорожен на 25 треугольных комнат, причем между любыми соседними комнатами есть дверь. Маляр начинает с некоторой комнаты и красит в комнатах пол. В комнату, в которой пол уже покрашен возвращаться запрещается. В каком максимальном количестве комнат маляр сможет покрасить пол?

443. На доске написаны числа 1,2,3. Разрешается стирать пару a, b, и записывать вместо нее на доску числа $2a + b$ и $2b + a$. Можно ли такими операциями получить на доске числа 100, 101, 102?

444. На окружности расставлены через равные промежутки 40 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались внутри круга (но выходить из одной точки отрезки могут). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

445. В ряд выписаны числа от 1 до 5. За ход разрешается поменять два соседних числа местами. Скольких расстановок можно получить такими операциями?

446. На отрезке длины 10 стоит 11 точек. Докажите, что есть две точки, расстояние между которыми не превосходит 1.

447. В команде капитана Сильвера 100 пиратов, причем 75 — без ноги, 80 — без глаза, 85 — без руки. Какое a) наибольшее b) наименьшее количество пиратов может быть без ноги, руки и глаза?

448. Составьте из цифр 4, 5, 6, 7 два двузначных числа с максимальным произведением.

449. В стране 7 городов, некоторые соединены между собой дорогами так, что из любого города можно добраться до любого. На дорогах ввели одностороннее движение так, что в любой город

можно въехать и из любого — выехать. Верно ли, что по этим дорогам, соблюдая правила, можно от любого города добраться до любого?

450. При каких a) натуральных b) целых n число n^3+8 — простое?

451. В вершинах куба расставили числа от 1 до 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются хотя бы на 3.

452. Ключ к пещере с сокровищами — слово из пяти букв. Али-Баба узнал, что это буквы С, Е, З, А, М. Сколько комбинаций ему придется перебрать, прежде чем пещера наверняка откроется?

453. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде частного квадрата и куба.

454. Какие остатки может давать точный куб от деления на 7?

455. На доске написаны числа 6, 7, 8. Разрешается стирать пару чисел a, b и писать вместо них $2a-b$ и $2b-a$. Можно ли такими операциями получить на доске числа 9, 10, 11?

456. Существует ли замкнутая 25-звенная ломаная, каждое звено которой пересекает ровно три других звена?

457. На доске нарисован квадрат 4×4 со всеми внутренними линиями. Сколько нарисовано a) прямоугольников b) прямоугольников, не являющихся квадратами?

458. На плоскости стоит камень в форме правильного тетраэдра. Разрешается перекатывать его через ребро. Докажите, что если камень вернулся на исходное место, то он стоит на той же грани, и все вершины оказались на исходных местах?

459. Что больше: 49^{50} или 216^{33}?

460. Лягушонок прыгает на клетчатом болоте по диагоналям прямоугольников $m\times n$, где m и n — нечетные числа. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

461. В связном графе степень каждой вершины равна 100. Докажите, что после стирания любого ребра граф останется связным.

462. Докажите, что 1030301 — точный куб.

463. Замок имеет форму правильного треугольника, каждая стена поделена на n равных отрезков. Стенками, параллельными главным стенам, замок разгорожен на несколько треугольных комнат, причем между любыми соседними комнатами есть дверь. a) Сколько этих комнат? Маляр начинает с некоторой комнаты и красит в комнатах пол. В комнату, в которой пол уже покрашен возвращаться запрещается. В каком максимальном количестве комнат маляр сможет покрасить пол?

464. Какое минимальное количество распилов потребуется, чтобы распилить куб $3\times3\times3$ на единичные кубики если a) распилы без наложений? b) части можно накладывать и пилить вместе?

465. В алфавите языка марсиан только две буквы — Ь и Ъ. От замен следующих буквосочетаний в словах смысл слова не меняется: ЪЬЪ $\leftrightarrow$ ЬЬ, ЪЬЬ $\leftrightarrow$ ЬЪ, ЬЬЪ $\leftrightarrow$ ЪЬ, ЬЬЬ $\leftrightarrow$ ЪЪ (замену можно делать в любом месте слова). Одинаков ли смысл у слов ЪЬЬ и ЬЪЪ?

466. a) Какие остатки от деления на 7 может давать сумма кубов? b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух кубов.

467. На доске 8×8 в каждой клетке написано число так, что каждое из чисел равно среднему арифметическому своих соседей по стороне. Докажите, что все числа равны.

468. Лягушонок на клетчатом болоте прыгает по сторонам прямоугольников $m\times n$, где m — четное, а n — нечетное. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

469. Докажите и запомните неравенство $a^2+b^2\geq 2ab$.

470. Сколько различных слов можно составить из букв слова СТОЛ?

471. В стране 7 городов, любые два соединены дорогой. На дорогах ввели одностороннее движение так, что в любой город можно въехать и из любого — выехать. Верно ли, что не нарушая правил движения, по этим дорогам можно из любого города добраться до любого?

472. $y = x^2 + 1$, — десятизначное число. Докажите, что в его записи есть две одинаковые цифры.

473. Какие остатки может давать точный куб от деления на 9?

474. В ресторане "Гастрит" предлагают 8 первых блюд, 5 вторых и 6 видов компотов. Сколько различных обедов можно заказать в этом ресторане?

475. Недалеко от людоеда живут три племени гномов. Каждый вечер людоед приглашает к себе на ужин нескольких гномов (от каждого племени не более одного). Сколько различных компаний гномов может собраться у людоеда на ужин?

476. Сколько различных слов можно получить переставляя буквы в словах a) СЛОН b) СОЛО c) ПАПА?

477. В стране 50 городов, из каждого выходит не менее 25 авиалиний. Докажите, что можно организовать туристический тур по четырем городам (есть четыре города циклически связанные авиалиниями: 1-ый со 2-ым, 2-ой с 3-им, 3-ий с 4-ым, 4-ый с 1-ым).

478. На доске написаны числа 6, 7, 8. За ход пару чисел a, b заменяют на пару $a-2$, $b+1$. Можно ли такими операциями получить на доске набор 10, 11, 12?

479. Сколько есть способов представить 50 в виде суммы двух a) натуральных b) четных c) нечетных чисел? (представления, отличающиеся порядком слагаемых считаются одинаковыми).

480. Двое по очереди ставят первый — плюсы, а второй — минусы на доску 9×9. Выигрывает тот, чей знак будет преобладать в большем количестве вертикалей. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

481. Что больше 2^{2^3} или 2^{3^2}?

482. a) Какие остатки может давать от деления на 9 сумма трех кубов? b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов.

483. В СССР были монеты достоинством 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек. Автомат разменивает любую монету начиная с трех копеек на три монеты. На какое наибольшее количество монет можно наверняка разменять монету достоинством a) 10 b) 15 c) 20 d) 50 копеек?

484. Докажите, что из любых 4 натуральных чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 4.

485. Недалеко от людоеда живут семь племен гномов. Каждый вечер людоед приглашает к себе на ужин нескольких гномов (от каждого племени не более одного). Сколько различных компаний гномов может собраться у людоеда на ужин?

486. На доске написаны числа 6, 7, 8 За ход можно заменить пару чисел a, b на пару $\frac{3a-b}{2}$, $\frac{3b-a}{2}$. Можно ли такими операциями получить на доске числа 9, 10, 11?

487. Докажите, что в десятичной записи числа 2^{30} a) не менее 9 цифр b) не более 10 цифр.

488. Какова может быть наибольшая площадь прямоугольника с периметром 40?

489. Дно прямоугольной коробки замощено прямоугольниками 1×4 и квадратами 2×2. Прямоугольник 1×4 потерялся и вместо него нашли лишний квадрат 2×2. Докажите, что теперь нельзя замостить дно той же коробки.

490. Докажите, что $3^{n+2} + 2^{n+3} - 3^n + 2^n$ делится на a) 8 b) 9 c) 72 при $n \geq 3$.

491. В квадрате 5×5 стоят плюсы и минусы. Разрешается менять знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы в любой строке и любом столбце плюсов было больше, чем минусов.

1(492). На концах полоски 1×100 стоит по фишке. Двое по очереди двигают каждый свою фишку на 1, 2, 3, или 4 клетки в любом направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

2(493). Докажите неравенство: $(x+y)^2 \geq 4xy$.

3(494). Докажите, что $10000 \cdot 10001 \cdot 10002 \cdot 10003 - 24$ делится на 9999.

4(495). В ряд стоит 17 различных натуральных чисел, причем первое меньше последнего. Докажите, что есть число, у которого предыдущее число меньше следующего.

5(496). Три кружковца: Рита, Федя и Гоша спорили после занятия кто решил больше задач:

Рита: Я решила больше всех.

Федя (Рите): Нет, не ты.

Гоша: На самом деле я.

Рита: Ну, уж точно не Гоша.

Федя: Потому что на самом деле я.

Известно, что тот, кто решил больше всех, сказал правду, а остальные — солгали. Кто решил больше всех задач?

6(497). В видеопрокате три полки с кассетами: на одной стоят мультики (8 кассет), на другой — ужастики (5 кассет), а на третьей — мистико-математические триллеры (6 кассет). Сколько способов есть у Васи взять по одной кассете с двух полок?

7(498). Можно ли выписать в строчку числа от 1 до 100 так, чтобы любые два соседних отличались хотя бы на 50?

8(499). Докажите, что число 1000001 — составное.

9(500). Докажите, что среди любых трех натуральных чисел есть несколько, сумма которых делится на 3.

10(501). Из 100 человек каждый вечер трое выходят в наряд. Может ли так случиться, что через несколько дней каждый побывает с каждым ровно в одном наряде?

11(502). Сколько натуральных делителей у числа $5^3 \cdot 2^2$?

12(503). Что больше: 25^{25} или 343^{17}?

504. В забеге участвовало 6 спринтеров. Сколько различных пьедесталов почета могло получиться?

505. На доске написаны числа 5, 6, 7. За ход можно заменить пару чисел a, b на пару $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$. Можно ли такими операциями получить набор 10, 11, 12?

506. У числа n^2 посчитали сумму цифр, у полученного числа снова посчитали сумму цифр и так далее, пока не получилась цифра. Могла ли получиться цифра 2?

507. Найдите все пары целых (не обязательно положительных чисел) x, y таких, что $x^2 = y^2 + 3$.

508. На что может быть сократима дробь $\frac{5n+2}{8n-2}$ при натуральных n ?

509. Сколько различных делителей у числа $2^n \cdot 3^m$ считая его самого и единицу?

510. Вася задумал число от 1 до 64. Петя может задавать вопросы, на которые Вася отвечает “Да” или “Нет”. Докажите, что a) за 6 вопросов Вася может угадать это число b) за 5 вопросов угадать число наверняка нельзя.

511. Докажите, что среди 51 числа можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

512. Кузнечик прыгает на клетчатой плоскости по диагоналям прямоугольника, обе стороны которого четные. Докажите, что вернуться на исходную кочку он может только за четное число прыжков.

513. На хоккейном поле лежат три разноцветные шайбы. За ход разрешается пробросить одну из шайб между двумя другими. После нескольких бросков оказалось, что все шайбы вернулись на свои исходные места. Докажите, что было сделано четное число бросков.

514. На 11 конспиративных квартирах, все расстояния между которыми различны, сидит 11 шпионов. Каждый шпион следит за шпионом, сидящим в ближайшей к нему квартире. Докажите, что есть шпион, который может пойти на задание, так как за ним никто не следит.

515. Докажите, что $2^{2^{2002}} - 1$ делится на 15.

Весенняя Олимпиада

1(516). Можно ли сложить прямоугольник из всех фигур:

?

2(517). На доске 10×10 закрашена 51 клетка. Докажите, что есть закрашенная клетка, у которой закрашено не менее двух соседних клеток.

3(518). Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^q + q^p$ — тоже простое.

4(519). На доске записаны числа 14, 4, 1996. За одну операцию можно из чисел a, b, c получить числа a, b, $a + b - 1$. Можно ли несколькими такими операциями получить числа 101, 139, 239?

5(520). В компании из 100 человек среди любых четырех есть человек, знакомый с остальными тремя. Докажите, что в этой компании есть человек, который знаком со всеми остальными.

6(521). На окружности стоит 11 точек: десять красных и одна синяя. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: все вершины которых красные, или имеющих одну синюю вершину?

7(522). В начале игры в коробке лежат 30 спичек. За ход можно взять из коробка любое количество спичек, не меньшее 1 и не большее половины числа спичек в коробке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?

8(523). В стране 11 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем никакие два города не соединены более чем одной дорогой. На каждой дороге введено одностороннее движение. Оказалось, что в каждый город можно въехать по 4 дорогам, и из каждого города можно выехать по 4 дорогам. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, заезжая по пути не более чем в два промежуточных города.

524. Из фигур шести видов (см. задачу 1 олимпиады) все-таки сложили прямоугольник (каждую фигуру можно использовать несколько раз). Докажите, что фигур первого вида было использовано четное число.

525. В забеге участвовало 6 бегунов, трое лучших попадали в сборную команду. Сколько различных сборных команд могло получиться?

526. В баре большие раки стоят 7 рублей, а маленькие — 5. У бизнесмена Васи есть 117 рублей. Сколько раков может купить Вася, истратив всю имеющуюся у него сумму? (Укажите все возможности и докажите, что других нет).

527. В парламенте среди любых двух депутатов хотя бы один — продажный. Известно, что один из депутатов — честный. Какое количество честных и какое количество продажных депутатов может быть в этом парламенте?

528. На доске написаны числа 1, 2, 3. За ход можно тройку чисел a, b, c заменить на тройку $\frac{3a+b}{2}$, $\frac{3b+c}{2}$, $\frac{3c+a}{2}$. Можно ли такими операциями получить набор 13, 14, 15?

529. Что больше $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ или 25?

530. a) Найдите три натуральных n при которых $\frac{3n+1}{n-1}$ — целое число. b) Докажите, что других таких натуральных n не существует.

531. n команд сыграли турнир. Для k-ой команды a_k — число ее побед, b_k — поражений. Докажите, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

532. Раки кончились. В баре осталось только виски, коньяк и бренди. Сколькими способами Вася может заказать себе обед из трех a) различных b) произвольных блюд.

533. Докажите что число $\overline{ababab}$ делится на 21.

534. В универмаге города Гайдаровска 1 января 1993 года продавалось 9 товаров по цене — один рубль за каждый. В течении января каждый день цена каждого товара увеличивалась либо в 2, либо в 3 раза. 1 февраля все цены были различными. Докажите, что цены каких-то двух товаров отличались хотя в 25 раз.

535. На что может быть сократима дробь $\frac{n+3}{3n+5}$ при натуральных n?

536. На доске написаны числа от 1 до 1000. За одну операцию числа a, b, c можно заменить на $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$. Можно ли такими операциями получить числа от 1001 до 2000?

537. В стране 51 город, некоторые соединены дорогами (любые два города соединены не более чем одной дорогой). На дорогах ввели одностороннее движение так, что в любой город можно въехать ровно по 20 дорогам и из любого города можно выехать ровно по 20 дорогам. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, заезжая по пути не более чем в два промежуточных города.

538. В кружке из 25 человек нужно выбрать a) двух дежурных b) старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

539. Докажите, что число трехзначных чисел без нулей в записи, таких что средняя цифра равна сумме двух крайних четно.

540. Докажите что квадрат 10×10 нельзя разрезать на 10 квадратов 2×2 и 15 прямоугольников 1×4.

541. Докажите, что прямая не может пересекать все стороны 11-угольника (не обязательно выпуклого).

542. Счастливым называется билет, в шестизначном номере которого сумма первых трех цифр равна сумме других трех цифр. Докажите, что количество счастливых билетов четно.

543. Из некоторого числа вычли сумму цифр, из получившегося числа снова вычли сумму его цифр и т. д. Могло ли в итоге получиться 10?

544. На доске 8×8 стоит 31 пешка. Докажите, что есть уголок из трех клеток, в котором не стоит ни одной пешки.

545. На шахматной доске расставили 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что количество ладей, стоящих в верхнем левом квадрате 4×4 равно количеству ладей, стоящих в правом нижнем квадрате 4×4.

546. Докажите, что a) двух- b) трех- c) n-значное число, при $n > 1$, больше суммы своих цифр.

547. a) В стране 5 городов, любые два соединены дорогой. На каждой дороге введено одностороннее движение. Докажите, что не нарушая правил, можно из любого города добраться до любого. b) Верно ли это для страны, в которой шесть городов?

548. На доске написано число 1. Разрешается число, записанное на доске увеличивать на 4, или в три раза. Можно ли такими операциями получить на доске 2002?

549. Докажите, что число $2^{2n} - 1$ делится на 3 при любом натуральном n.

550. Что больше: 17^{30} или 31^{23}?

Летнее задание.

551. 30 команд сыграли турнир, причем каждая команда сыграла 28 игр. Докажите, что эти команды можно разделить на две группы так, чтобы в группе каждая команда сыграла с каждой.

552. Разложите на множители: $n^4 + n^2 + 1$.

553. Докажите, что если в графе степень каждой вершины не больше k, то вершины графа можно раскрасить в $k + 1$ цвет так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

554. Докажите, что количество способов расставить на доске 8×8 14 не бьющих друг друга слонов — точный квадрат.

555. Докажите, что количество способов расставить на доске 8×8 8 не бьющих друг друга ладей равно 8!.

556 Для некоторых целых a, b, c, d верно равенство $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$. Докажите, что все числа a, b, c, d равны нулю.

557. Докажите, что если в графе из a) $2n$ b) $2n + 1$ вершины степень каждой вершины хотя бы n, то граф связен.

558. Выведите формулу для суммы $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} + 3^n$ и запомните ее.

559. Докажите, что гирями весом $1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}$ можно взвесить любой целый вес от 1 до $\frac{3n-1}{2}$. (Гири можно класть на обе чашки весов).

560. В графе с четным числом вершин среди любых трех вершин хотя бы два ребра проведены. Докажите, что вершины можно разбить на пары, соединенные между собой ребром.

561. На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у всех прямых?

562. Докажите, что в дереве есть хотя бы две вершины степени 1 (висячих вершины).

563. Докажите и запомните формулу $a^{2n+1}+1 = (a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}-a^{2n-3}+\ldots+a^2-a+1)$.

564. Докажите, что если в графе среди любых четырех вершин есть вершина, связанная со остальными тремя, то в графе есть вершина, связанная со всеми вершинами.

565. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ (разложение на простые множители). Докажите, что число делителей такого числа равно $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$.

566. a) Докажите, что у точного квадрата нечетное число натуральных делителей. b) Докажите, что если у натурального число нечетное число натуральных делителей — то это точный квадрат.

567. Пусть $a + b = c + d$ и при это расстояние между c и d меньше, чем расстояние между a и b. Докажите, что тогда $cd > ab$.

568. Докажите, что среди пар положительных чисел с произведением 100, минимальную сумму имеют два равных числа.

569. В СССР были монеты достоинством 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и один рубль. Автомат разменивает любую монету, начиная с 5 копеек на четыре монеты. На какое наибольшее число монет можно наверняка разменять монету, достоинством 1 рубль?

570. 12 команд сыграли волейбольный турнир в один круг. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если A выиграла у B, либо A выиграла у некоторой команды, победившей B. Докажите, что победитель турнира сильнее всех. (В волейбол играют без ничьих)

571. После волейбольного турнира в один круг, нашлись две команды, у которых поровну побед. Докажите, что найдется тройка команд A, B и C, таких что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у A.

572. Найти все a) двузначные b) трехзначные c) натуральные числа, которые ровно в 12 раз больше суммы своих цифр.

573. Есть a) квадрат b) прямоугольник со сторонами, большими единицы. Двое играют в игру: за ход разрешается закрасить еще не закрашенную до этого клетку и все клетки, которые правее и ниже ее. Проигрывает тот, кому придется закрасить последнюю клетку. Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.

574. В стране каждые два из n городов соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что бродячий торговец может, выехав из некоторого города, объехать по одному разу все n городов, на нарушив правил движения.

575. Докажите, что 2^{300} содержит a) хотя бы 90 b) не более 100 цифр в своей десятичной записи.

1(576). Можно ли 13 компьютеров соединить проводами двенадцати разных цветов так, чтобы из любого компьютера выходили провода всех 12 цветов?

2(577). Имеется куча с 1001 камнем. За ход разрешается из любой кучи, в которой больше одного камня, один камень выбросить на помойку, а затем одну из куч поделить на две кучи так, чтобы в каждой из новых куч было не меньше одного камня. Можно ли такими операциями получить несколько куч, по три камня в каждой?

3(578). Квадрат оканчивается на две одинаковые ненулевые цифры. Докажите, что эти цифры — четверки.

4(579). $24a + 33b$ делится на 19. Докажите, что и $14a + 5b$ тоже делится на 19.

5(580). В ряд стоит 30 стульев. На них по очереди садятся люди. Если кто-то сел, то один из его соседей (если он есть) встает и уходит. Какое максимальное количество стульев может быть занято при таких условиях?

6(581). Есть 27 монет, из которых одна — фальшивая, легче настоящих. Докажите, что за три взвешивания на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету.

7(582). Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ простое при любом натуральном n?

8(583). Вася купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы. После этого он вырвал 25 листов и сложил номера страниц на них. Могло ли у него получиться 2002?

9(584). Докажите, что среди 7 натуральных чисел есть два, разность которых делится на 6.

10(585). В Хогвартсе расследуют пропажу философского камня. Подозреваемых три: Гарри Поттер, Драко Малфой и профессор Квирелл. Драко сказал: “Это сделал Поттер”. Показания остальных двух подозреваемых были утеряны, однако известно, что украл только один, и только он сказал правду. Кто украл философский камень?